오차론

이순일

아주대학교 물리학과

오차론

- 오차는 모든 측정에 수반되는 불가피한 불확실성을 의미
- 오차의 분석은 측정의 불확실성을 조사 및 평가하는 것
- 측정에 있어 불확실성은 작아야 하지만, 극도의 정밀성이 늘 요구되는 것은 아님 (측정치의 수 %면 충분)
- 측정치 및 오차의 범위에 대한 정당한 근거가 요구됨
- 눈금을 읽는 경우에 나타나는 오차는 눈금 사이 위치 추정 시 (interpolation) 발생
- 반복 측정 시 오차는 통계적 방법으로 추정 (예: 반감기 측정)
  - ✓ 반복 측정의 평균이 참값에 대한 최상의 추정치임
  - ✓ 표준 편차와 신뢰도 한계
- 통계적 분석 이전에 systematic error 제거 필요

아주대학교 AJOU UNIVERSITY
Department of Energy Systems Research
NMDID LAB.

오차 보고 및 이용

- 물리적인 양 x 측정치 보고: $x = \text{best estimate} \pm \text{error} = x_{best} \pm \delta x$
  - ✓ δx 는 신뢰도 한계와 밀접 (예: 50%, 68%, 95%)
  - ✓ δx 는 유효숫자 1-2개로 표기
  - ✓ x_{best} 의 마지막 유효 숫자는 오차와 같은 크기

    $\Rightarrow$ $92.5 \pm 0.3,\ 93 \pm 3,\ 90 \pm 30,\ (1.61 \pm 0.05) \times 10^{-19}$ C
  - ✓ 상대 오차 $\dfrac{\delta x}{|x_{best}|}$ $\Rightarrow$ 50 ± 1 cm or 50 cm $\pm 2\%$
- 계산에는 통상 정당화가 가능한 유효숫자보다 하나 더 사용
- 측정값 일치 $\Rightarrow$ $40 \pm 5\ \Omega$ & $42 \pm 8\ \Omega$ versus $35 \pm 2\ \Omega$ & $45 \pm 1\ \Omega$
  - ✓ 329 ± 5 m/s는 만족할만한 측정 (알려진 음속 331 m/s)
  - ✓ $p_i = 1.49 \pm 0.04$ kg·m/s & $p_f = 1.56 \pm 0.046$ kg·m/s :운동량 보존

오차의 전파 - 1

- 측정 결과: $x_{\text{best}} \pm \delta x,\ y_{\text{best}} \pm \delta y, \cdots,\ u_{\text{best}} \pm \delta u, \cdots,\ v_{\text{best}} \pm \delta v$

  ✓ 합과 차 $q = x + y + \cdots + z - (u + v + \cdots + w) \Rightarrow q_{best} \pm \delta q$

  $$q_{best} = x_{best} + y_{best} + \cdots + z_{best} - (u_{best} + v_{best} + \cdots + w_{best})$$

  $$\delta q = \delta x + \delta y + \cdots + \delta z + \delta u + \delta v + \cdots + \delta w$$

  ✓ 곱하기와 나누기 $q = \dfrac{x \times y \times \cdots \times z}{u \times v \times \cdots \times w} \Rightarrow q_{best}(1 \pm \dfrac{\delta q}{|q_{best}|})$

  $$q_{best} = \frac{x_{best} \times y_{best} \times \cdots \times z_{best}}{u_{best} \times v_{best} \times \cdots \times w_{best}}$$

  $$\frac{\delta q}{|q_{best}|} = \frac{\delta x}{|x_{best}|} + \frac{\delta y}{|y_{best}|} + \cdots + \frac{\delta z}{|z_{best}|} + \frac{\delta u}{|u_{best}|} + \frac{\delta v}{|v_{best}|} + \cdots + \frac{\delta w}{|w_{best}|}$$

Department of Energy Systems Research
NMDID LAB.

오차의 전파 - 2

✓ 측정 결과 곱하기 상수 $q = Bx \;\Rightarrow\; q_{best} \pm \delta q$

$$q_{best} = Bx_{best} \qquad \& \qquad \delta q = |B|\,\delta x$$

✓ 지수함수 $q = x^n \;\Rightarrow\; q_{best}\left(1 \pm \dfrac{\delta q}{|q_{best}|}\right)$

$$q_{best} = x^n_{best} \qquad \& \qquad \frac{\delta q}{|q_{best}|} = n\frac{\delta x}{|x_{best}|}$$

Example: 자유낙하 높이 측정으로 부터 중력가속도 구하기

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad g = \frac{2h}{t^2}$$

$$g_{best} = \frac{2h_{best}}{t^2_{best}}, \qquad \frac{\delta g}{|g_{best}|} = \frac{\delta h}{|h_{best}|} + 2\frac{\delta t}{|t_{best}|}$$

오차의 전파 - 3

- 독립적 (independent or random) 오차:
  - ✓ $q = x + y$라면 $q_{best} = x_{best} + y_{best}$이며 일반적으로 $\delta q \le \delta x + \delta y$
  - ✓ 무작위 오차를 갖는 x와 y의 측정값은 정규분포를 따르며, 이 경우의 오차는 $\delta q = \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2}$
  - ✓ 합과 차 $q = x + y + \cdots + z - (u + v + \cdots + w) \Rightarrow q_{best} \pm \delta q$

$$q_{best} = x_{best} + y_{best} + \cdots + z_{best} - (u_{best} + v_{best} + \cdots + w_{best})$$

$$\delta q = \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2 + \cdots + (\delta z)^2 + (\delta u)^2 + (\delta v)^2 + \cdots + (\delta w)^2}$$

일반적으로 $\delta q \le \delta x + \delta y + \cdots + \delta z + \delta u + \delta v + \cdots + \delta w$

오차의 전파 - 4

✓ 곱하기와 나누기 $q = \dfrac{x \times y \times \cdots \times z}{u \times v \times \cdots \times w} \Rightarrow q_{best}\left(1 \pm \dfrac{\delta q}{|q_{best}|}\right)$

$$q_{best} = \frac{x_{best} \times y_{best} \times \cdots \times z_{best}}{u_{best} \times v_{best} \times \cdots \times w_{best}}$$

$$\frac{\delta q}{|q_{best}|} = \sqrt{\left(\frac{\delta x}{x_{best}}\right)^2 + \left(\frac{\delta y}{y_{best}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\delta z}{z_{best}}\right)^2 + \left(\frac{\delta u}{u_{best}}\right)^2 + \left(\frac{\delta v}{v_{best}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\delta w}{w_{best}}\right)^2}$$

일반적으로

$$\frac{\delta q}{|q_{best}|} \le \frac{\delta x}{|x_{best}|} + \frac{\delta x}{|x_{best}|} + \cdots + \frac{\delta z}{|z_{best}|} + \frac{\delta u}{|u_{best}|} + \frac{\delta v}{|v_{best}|} + \cdots + \frac{\delta w}{|w_{best}|}$$

오차의 전파 - 5

✓ 하나의 변수에 의존하는 임의 함수 $q = f(x) \Rightarrow q_{best} = f(x_{best})$

$$\pm\delta q = f(x_{best} \pm \delta x) - f(x_{best}) \approx \left[f(x_{best}) \pm \frac{df}{dx}\delta x \right] - f(x_{best}) \approx \pm\frac{df}{dx}\delta x$$

$$\therefore \quad \delta q = \left|\frac{df}{dx}\right|\delta x$$

Example 1: $q = \cos\theta \;\; \& \;\; \theta = 20 \pm 3°$

$$\delta q = \left|\frac{d}{d\theta}(\cos\theta)\right|\delta\theta = |\sin\theta|\,\delta\theta = |\sin(20°)| \times 0.05 \text{ rad} = 0.34 \times 0.05 = 0.02$$

$$\therefore \quad q = 0.94 \pm 0.02$$

Example 2: $q = x^m$ (m can be any number: fraction and negative)

$$\frac{\delta q}{|q_{best}|} = |m|\frac{\delta x}{|x_{best}|}$$

아주대학교 AJOU UNIVERSITY
Department of Energy Systems Research
NMDID LAB.

오차의 전파 - 6

✓ 여러 변수에 의존하는 임의 함수

$$q = g(x, y, \cdots, z) \quad \Rightarrow \quad q_{best} = g(x_{best}, y_{best}, \cdots, z_{best})$$

$$\delta q = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\delta y\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\delta z\right)^2}$$

일반적으로

$$\delta q \le \left|\frac{\partial g}{\partial x}\delta x\right| + \left|\frac{\partial g}{\partial y}\delta y\right| + \cdots + \left|\frac{\partial g}{\partial z}\delta z\right|$$

아주대학교 AJOU UNIVERSITY
Department of Energy Systems Research
NMDID LAB.

무작위 오차의 통계적 분석-1

- 무작위 오차(random error)는 통계적으로 다룰 수 있으나 체계적 오차(systematic error)는 통계적 처리가 불가능
- 무작위 오차만 있다면 물리량 *x*의 반복된 측정 결과는 가우스 함수로 표현되는 정규 분포(normal distribution)를 따른다.
- 가우스 함수는 각각 봉우리(peak) 위치와 폭을 나타내는 μ와 σ 두개의 parameter로 정의된다.

$$f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

평균 μ와 분산 σ²로 모 집단을 정의하기도 한다.

- 정규화된 가우스 함수는 측정값 x가 나올 확률 밀도에 해당한다.
- μ는 *x*의 참값에 해당한다.

확률 $f_{\mu,\sigma}(x)dx$

아주대학교 AJOU UNIVERSITY

무작위 오차의 통계적 분석-2

- 정규 분포를 따르는 x의 측정 결과의 평균은 μ이다.

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\mu,\sigma}(x)dx = \mu$$

- 정규 분포를 따르는 x의 측정 결과의 분산은 σ^2이다.

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\bar{x})^2 f_{\mu,\sigma}(x)dx = \sigma^2$$

- 이 경우 단일 측정값이 참값과 표준편차 이내의 범위 $\mu \pm \sigma$에서 나올 확률이 68.3%이며, $\mu \pm 2\sigma$와 $\mu \pm 3\sigma$의 범위 안에서 나올 확률은 각각 95.4%와 99.7%이다.

- 대부분의 경우에 μ와 σ는 모르며, 유한한 수의 측정값들로부터 이를 추정하는 것이 요구됨.

아주대학교 AJOU UNIVERSITY
Department of Energy Systems Research
NMDID LAB.

무작위 오차의 통계적 분석-3

- 정상 분포를 따르는 *x*의 측정 결과 N개의 평균이 참값 μ에 대한 최상의 추정치이다.

Principle of maximum likelihood

$$\mu_{best} = \bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \quad \text{for} \quad \{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$$

- 모 집단(population)의 표준편차 σ에 대한 최상의 추정치는

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{1}^{N}(x_i - \mu)^2}$$

- 참값 μ는 모르므로, 이를 최상의 추정치(표본 표준편차)로 대체

$$\sigma_s = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

"improved" standard deviation of the *N* measured values

아주대학교 AJOU UNIVERSITY
Department of Energy Systems Research
NMDID LAB.

무작위 오차의 통계적 분석-4

- 단일 측정 표본 $\{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$의 결과 보고: $\bar{x} \pm \sigma_s$
- 표본 크기 *N*이 커짐에 따라 결과의 오차가 작아짐: $\bar{x} \pm \dfrac{\sigma_s}{\sqrt{N}}$

  표본 표준편차 σ_s는 단일 표본의 크기 N을 늘려도 크게 달라지지 않음.

- 이는 크기 *N*인 표본 측정을 반복하고, 각각의 표본 측정에 대해 구한 표본 평균의 평균과 표준편차를 고려한 결과이다.

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \bar{x} = \mu \quad \Rightarrow \quad \bar{x}_{av} = \mu$$

표본 평균은 모 평균에 대한 추정 값이며,
'표본 평균의 평균'이 모 평균과 같다.

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{N}}\,\sigma_s$$

아주대학교 AJOU UNIVERSITY
Department of Energy Systems Research
NMDID LAB.